Решения задач из пдфки. за правильность решений не отвечаю, просто скопипастила все, что нарешали перед зачетом)

1. Просто знать определения.

10. Переформулируем в терминах цепей Маркова. Есть процесс с

дискретным временем - f(i), i=1,2,..., принимает значения только 1 и

-1. При этом, для любого i P(f(i+1)=f(i))=0.7,

P(f(i+1)=-f(i))=0.3,т.е. имеем марковский процесс. В таком случае, по

индукции легко доказать: P(f(i)=1)=0.5 для всякого i. Для i=1 - по

условию, для i=k+1 P(f(k+1)=1)=P(f(k)=1)\*0.7+P(f(k)=0)\*0.3=(по

предположению индукции)=0.5\*0.7+0.5\*0.3.

Итак, получим, что вероятность повернуть налево на любом повороте равна 0.5.

11. Как следует из определения матрицы интенсивности перехода и

уравнений Колмогорова, P=exp(Q). Надеюсь, все еще помнят, как находить

экспоненту от матрицы:)

P(t)=exp^{tQ}

3.

Определение винеровского процесса - стр.13 сканов лекций

Определения нужных непрерывности и дифференцируемости - стр.29, 30.

На этих же страницах теоремы - критерии непрерывности, дифференцируемости.

винеровский процесс непрерывен:

Ew(t) = E(w(t) - w(0)) = E N(0, t) = 0 - непрерывна (\*) // винеровский процесс - w(0) = 0 п.в., N(0, t) - нормальное распределение с соответствующими параметрами

K(t, s) = E(w(t)w(s)) - Ew(t) Ew(s) = E(w(t)w(s))

при t >= s получаем

K(t, s) = E([w(t) - w(s) + w(s)] [w(s) - w(0)]) = /\* по независимости приращений \*/ E N(0, t-s) Ew(s) + E[w(s)^2] = E[w(s)^2] = E[N(0, s)^2] = D[N(0, s)] = s (либо s^2 - не помню точно, параметр с квадратом или без. но вроде бы s).

Итого K(t, s) = min(t, s).

Эта функция непрерывна в точках (t0, t0) (\*\*)

(\*), (\*\*) => процесс непрерывен.

процесс не дифференцируем, т.к. не существует d2K/dtds в точках (t0, t0) (как раз в них у функции излом)

Решение не гарантированно правильное, но вроде как-то так.

задача 8 (за полноту и правильность не ручаюсь,как сама понимаю):

для стохаст. диф ур-ия общего вида (из лекций) решение имеет след вид:

E(t)=w(t,t0)E0+\интеграл от t0 до t\w(t,s)b(s)dn0(s)

в задаче 8 соответственно: t0=0; a(t)=-1, b(t)=1; E(0)=E0

таким образом E(t)=w(t,t0)E0+\интеграл от t0 до t\w(t,s)dn0(s)

Задача 8. В прошлом решении фигурирует W(t, s), которая непонятно что, и её надо найти.

сканы, стр.33, система (10) - описание того, как найти W

выписываем:

dW/dt = -W, W(s, s) = 1

dW/W = -dt

ln W(t, s) = -t + f(s) (константа относительно t, а относительно s любая функция)

Подставляем точку (s, s):

0 = - s + f(s)

f(s) = s

Итого W(t, s) = exp{s - t}

И вот это уже подставляем в решение (сканы, стр.33, равенство (12)):

Ksi(t) = exp{-t} \* Ksi0 + int[t0, t](exp{s - t} dNu(s))

Сильнее уточнить мы не можем, т.к. не даны Ksi0 и Nu(s), так что предположительно, это ответ.

задача 13.

Это в чистом виде последние две страницы сканов лекций. Выписываю сюда.

В сканах лекций написано, что t принадлежит отрезку [0, pi] (а не просто t >= 0)

стр. 40 сканов, теорема в применении к условию:

оптимальные оценки имеют вид

а1\_крышечка = интеграл[0, pi](с1(t) dPsi(t)),

а2\_крышечка = интеграл[0, pi](c2(t) dPsi(t)), где

c1(t) = с11(t) \* cos(t) + c12(t) \* sin(t)

c2(t) = c21(t) \* cos(t) + c22(t) \* sin(t), где

С = (cij) = B^(-1), где

B = (bij), где

b21 = b12 = интеграл[0, pi](cos(t) \* sin(t) dt) = 0,

b11 = интеграл[0, pi](cos^2(t) dt) = pi/2 = интеграл[0, pi](sin^2(t) dt) = b22

Итого

B = [ [pi/2, 0], [0, pi/2] ],

C = [ [2/pi, 0], [0, 2/pi] ],

c1(t) = 2/pi \* cos(t) + 0 \* sin(t) = 2/pi \* cos(t),

c2(t) = 0 \* cos(t) + 2/pi \* sin(t) = 2/pi \* sin(t),

и ответ:

а1\_крышечка = 2/pi \* интеграл[0, pi](cos(t) dPsi(t)),

а2\_крышечка = 2/pi \* интеграл[0, pi](sin(t) dPsi(t)).

(в общем виде в теореме, б\_иж = интеграл(Фи\_и(т) \* Фи\_ж(т) дт), С = B^(-1), с\_и = сумма[с\_иж \* Фи(т)], здесь Фи1(т) = косинус(т), Фи2(т) = синус(т), сумма из двух слагаемых; и общий вид приближения: ак\_крышечка = интеграл(ск дПси(т)))

И в задачах 1, 4, кто будет писать по решениям прошлых лет, корреляционная функция выписана для t >= s, так что там не забудьте, что в случае t < s надо поменять ролями t и s в выражении и получить кусочно заданную функцию.

И там же для дисперсии написано "аналогично" - оно действительно аналогично: вспоминаем формулу дисперсии суммы - с учётом того, что ковариация слагаемых есть ноль (ибо они независимы), получаем, что это сумма дисперсий, и выходит то же выражение, что и для мат.ожидания.